

ΜΑΘΗΜΑ 19

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Θεωρία – Σχόλια - Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό αριθμό M , καθώς $x \rightarrow x_0$.

2.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό αριθμό $-M$, καθώς $x \rightarrow x_0$.

3.

Θεώρημα

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Ομοίως για το $-\infty$

4.

Πρόσημο της συνάρτησης

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) > 0$ κοντά στο x_0

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow f(x) < 0$ κοντά στο x_0

5.

Μη ρωτάς γιατί (φθάνει να το βρίσκεις λογικό)

$$-(+\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad +(+\infty) = +\infty, \quad +(-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Γινόμενο με θετικό αριθμό λ :

$$\lambda(+\infty) = +\infty$$

$$\lambda(-\infty) = -\infty$$

Γινόμενο με αρνητικό αριθμό λ :

$$\lambda(+\infty) = -\infty$$

$$\lambda(-\infty) = +\infty$$

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+, \quad \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$|+\infty| = +\infty, \quad |-\infty| = +\infty$$

$$\sqrt{+\infty} = +\infty, \quad \sqrt[3]{+\infty} = +\infty, \quad . . . , \quad \sqrt[2v]{+\infty} = +\infty$$

6.

Βασικά όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty, \quad . . . , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty, \quad . . . , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty, \quad . . . , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$$

7.

Οι μορφές απροσδιοριστίας

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Τα σύμβολα $+\infty$, $-\infty$

Κρίνουμε απαραίτητο να τονίσουμε, ότι τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ δεν είναι αριθμοί. Για την κατανόησή τους, ας φανταζόμαστε ότι :

Το $+\infty$ είναι πολύ μεγάλος μεταβλητός θετικός αριθμός.

Το $-\infty$ είναι πολύ μεγάλος μεταβλητός αρνητικός αριθμός

Όμως συμπεριφέρονται σαν αριθμοί, εκτός των περιπτώσεων

$$+\infty + (-\infty), \quad +\infty - (+\infty), \quad -\infty - (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm \infty), \quad \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

τις οποίες ονομάζουμε απροσδιόριστες μορφές.

2.

Στις ασκήσεις

Να θέτουμε όπου x το x_0 για να βρίσκουμε το είδος της απροσδιοριστίας.

3.

Άμεση συνέπεια του ορισμού του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

4.

Άμεση συνέπεια του ορισμού του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Αν $g(x) \leq f(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Εφόσον υπάρχει να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{|x^2-x-2|}$

Προτεινόμενη λύση

Μια ίσως ευκολότερη παρουσίαση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{|x^2-x-2|} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-4)}{\lim_{x \rightarrow 2} |x^2-x-2|} \\ &= \frac{2-4}{|2^2-2-2|} = \frac{-2}{0^+} = -2 \cdot \frac{1}{0^+} = -2(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Παρουσίαση σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{|x^2-x-2|} = \frac{2-4}{|2^2-2-2|} = \frac{-2}{0} \quad \text{αδυναμία - απροσδιοριστία}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 2-4 = -2 < 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-x-2) = 2^2-2-2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} |x^2-x-2| = 0$$

με $|x^2-x-2| > 0$ κοντά στο 2 άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x^2-x-2|} = +\infty \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{|x^2-x-2|} = -\infty$$

2.

Εφόσον υπάρχει να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x^2-x-2}$

Μια ίσως ευκολότερη παρουσίαση

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x^2-x-2} = \frac{2-4}{2^2-2-2} = \frac{-2}{0} \text{ αδυναμία}$$

Πρόσημο του παρανομαστή

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-4}{x^2-x-2} = \frac{2-4}{0^+} = -2 \cdot \frac{1}{0^+} = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-4}{x^2-x-2} = \frac{2-4}{0^-} = -2 \cdot \frac{1}{0^-} = -2(-\infty) = +\infty$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Παρουσίαση σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 2-4 = -2 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-x-2) = 2^2-2-2 = 0 \text{ αλλά δε γνωρίζουμε το πρόσημο}$$

Κοντά στο $x_0 = 2$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-x-2} = \frac{x-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x+1} = \frac{2-4}{2+1} = -\frac{2}{3} < 0 \quad (3)$$

$$\bullet \text{ Για } x > 2, \text{ δηλαδή } x-2 > 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad (4)$$

$$\text{Από τις (3), (4)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \text{ Για } x < 2, \text{ δηλαδή } x-2 < 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad (5)$$

$$\text{Από τις (3), (5)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3.

Εφόσον υπάρχει να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3} - 3x + 3\sqrt{x} - 1}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3} - 3x + 3\sqrt{x} - 1} = \frac{1 - \sqrt{1}}{\sqrt{1^3} - 3 \cdot 1 + 3\sqrt{1} - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{απροσδιοριστία}$$

Κοντά στο $x_0 = 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3} - 3x + 3\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}^3 - 3\sqrt{x}^2 + 3\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x}^3 - 1) - 3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x}^2 + \sqrt{x} + 1) - 3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x}^2 + \sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1)^2 = (\sqrt{1} - 1)^2 = 0 \quad \text{και} \quad (\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \quad \text{κοντά στο } x_0 = 1$$

$$\text{Οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

4.

Εφόσον υπάρχει να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-5}{1-\sin x}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-5}{1-\sin x} = \frac{2 \cdot 0 - 5}{1 - \sin 0} = \frac{-5}{0} = -5 \cdot \frac{1}{0} \quad \text{αδυναμία - απροσδιοριστία}$$

Κοντά στο $x_0 = 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-5}{1-\sin x}$

$$\text{Είναι} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 5) = 2 \cdot 0 - 5 = -5 < 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x) = 1 - \sin 0 = 1 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\sin x < 1 \Rightarrow 1 - \sin x > 0 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (1), (2), (3)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

5.

Εφόσον υπάρχουν να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2}$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^3}$$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 \quad \text{από τη θεωρία.}$$

ii)

$$\text{Κοντά στο } x_0 = 0 \text{ έστω } f(x) = \frac{\eta \mu x}{x^2} = \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{Άρα δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2}$$

iii)

$$\text{Κοντά στο } x_0 = 0 \text{ έστω } f(x) = \frac{\eta \mu x}{x^3} = \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^3} = +\infty$$

6.

Εφόσον υπάρχουν να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^3}$

Υπόδειξη.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta\mu 2x}{2x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} = 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

και ακολούθησε την άσκηση 5.

7.

Εφόσον υπάρχει να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x^9}$ Υπόδειξη. $\frac{\eta\mu 5x}{x^9} = \frac{\eta\mu 5x}{x} \cdot \frac{1}{x^8}$ και ακολούθησε την άσκηση 6 και 5

8.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x + \lambda}{|x - 1|}$ στο $x_0 = 1$.

Προτεινόμενη λύση

$$f(x) = (3x + \lambda) \frac{1}{|x - 1|} \text{ κοντά στο } x_0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + \lambda) = 3 + \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = |1 - 1| = 0 \text{ με } |x - 1| > 0 \text{ κοντά στο } x_0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} = +\infty$$

- Όταν $3 + \lambda > 0$, δηλαδή $\lambda > -3$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$
- Όταν $3 + \lambda < 0$, δηλαδή $\lambda < -3$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$
- Όταν $3 + \lambda = 0$, δηλαδή $\lambda = -3$, έχουμε $f(x) = \frac{3x - 3}{|x - 1|} = 3 \frac{x - 1}{|x - 1|}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 3 \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{-(x - 1)} = 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -3$$

Επομένως δεν έχει όριο στο $x_0 = 1$.

9.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda x + 2}{x^2 - 4x + 4} \quad \text{στο } x_0 = 2.$$

Προτεινόμενη λύση

$$f(x) = (\lambda^2 x^2 - \lambda x + 2) \frac{1}{(x-2)^2} \quad \text{κοντά στο } x_0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\lambda^2 x^2 - \lambda x + 2) = (\lambda^2 2^2 - \lambda 2 + 2) = 4\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 2(2\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = (2-2)^2 = 0 \quad \text{με } (x-2)^2 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Πρόσημο του $2(2\lambda^2 - \lambda + 1)$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0, \quad \text{άρα } 2(2\lambda^2 - \lambda + 1) > 0 \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

10.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + \alpha x + 4}$ κοντά στο $x_0 = 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον α ώστε να είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

Προτεινόμενη λύση

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 + \alpha x + 4} \Rightarrow f(x)(x^2 + \alpha x + 4) = x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)(x^2 + \alpha x + 4)] = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \alpha x + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} (2^2 + \alpha \cdot 2 + 4) = 4 + 2\alpha + 4 = 2\alpha + 8$$

- Αν $2\alpha + 8 > 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)(x^2 + \alpha x + 4)] = +\infty$,
που είναι άτοπο από την (1)

- Αν $2\alpha + 8 < 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)(x^2 + \alpha x + 4)] = -\infty$,
που είναι άτοπο από την (1)

- Αν $2\alpha + 8 = 0$ δηλαδή $\alpha = -4$

$$\text{θα έχουμε } f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{x+1}{(x-2)^2} = (x+1) \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0 \quad \text{με } (x-2)^2 > 0 \quad \text{κοντά στο } x_0 = 2,$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{και } \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 2+1 = 3 > 0$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

Βρήκαμε, λοιπόν, ότι η ζητούμενη τιμή είναι $\alpha = -4$.

11.

Για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{(\lambda^2 + 2)x^2 + 2(\lambda + \mu)x + \mu^2}{(x+1)^2} \quad \text{στο } x_0 = -1, \text{ εφόσον υπάρχει.}$$

Προτεινόμενη λύση

$$f(x) = [(\lambda^2 + 2)x^2 + 2(\lambda + \mu)x + \mu^2] \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{κοντά στο } x_0 = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} [(\lambda^2 + 2)x^2 + 2(\lambda + \mu)x + \mu^2] &= (\lambda^2 + 2)(-1)^2 + 2(\lambda + \mu)(-1) + \mu^2 \\ &= \lambda^2 + 2 - 2\lambda - 2\mu + \mu^2 \\ &= \lambda^2 + 1 + 1 - 2\lambda - 2\mu + \mu^2 \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1) + (\mu^2 - 2\mu + 1) \\ &= (\lambda - 1)^2 + (\mu - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = (-1+1)^2 = 0 \quad \text{με } (x+1)^2 > 0 \quad \text{κοντά στο } x_0 = -1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

- Όταν $(\lambda - 1)^2 + (\mu - 1)^2 > 0$, δηλαδή όταν $\lambda \neq 1$ ή $\mu \neq 1$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

- Όταν $(\lambda - 1)^2 + (\mu - 1)^2 = 0$, δηλαδή όταν $\lambda = 1$ και $\mu = 1$ τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1^2 + 2)x^2 + 2(1+1)x + 1^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{(x+1)^2} = (3x+1) \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+1) = -3+1 = -2 < 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0 \quad \text{με } x+1 > 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+1) = -2 < 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

Επομένως η f δεν έχει όριο στο $x_0 = -1$

12.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, να

βρείτε το ℓ για τις διάφορες τιμές του α .

Προτεινόμενη λύση

Είναι $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, άρα $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+1}{x-3}$$

- Όταν $\alpha - 3 \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x+1}{x-3} = \frac{\alpha+1}{\alpha-3}$

$$\text{Άρα } \ell = \frac{\alpha+1}{\alpha-3}$$

- Όταν $\alpha - 3 = 0$, δηλαδή $\alpha = 3$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 3+1 = 4 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} (x-3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0 \text{ με } x-3 > 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \quad (2)$$

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

13.

Για τη συνάρτηση f δίνεται ότι $f(x) \neq -1$ κοντά στο $x_0 = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{f(x) + 1} = +\infty. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $\frac{f(x) - 2}{f(x) + 1} = h(x)$ κοντά στο $x_0 = 2$.

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\text{και } f(x) - 2 = h(x) [f(x) + 1] \quad \text{λύνουμε ως προς } f(x)$$

$$f(x) - 2 = h(x) f(x) + h(x)$$

$$f(x) - h(x) f(x) = h(x) + 2$$

$$f(x) [1 - h(x)] = h(x) + 2 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow h(x) > 1 \Rightarrow 1 - h(x) < 0$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = \frac{h(x) + 2}{1 - h(x)} \Rightarrow f(x) = \frac{1 + 2 \frac{1}{h(x)}}{\frac{1}{h(x)} - 1}$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + 2 \frac{1}{h(x)}}{\frac{1}{h(x)} - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + 2 \frac{1}{h(x)} \right)}{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{h(x)} - 1 \right)} = \frac{1 + 2 \cdot 0}{0 - 1} = -1$$

14.

Για τη συνάρτηση f δίνεται ότι $f(x) \neq 3$ κοντά στο $x_0 = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{f(x) - 3} = +\infty. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

Υπόδειξη.

Ακολουθήσε την άσκηση 13.

15.

Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)\eta\mu(\pi x)}{\pi(x-1)} = +\infty$.

Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)\eta\mu(\pi x)}{\pi(x-1)}$ κοντά στο $x_0 = 1$. **(1)**

Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ και $g(x)\pi(x-1) = f(x)\eta\mu(\pi x)$

$$f(x) = \frac{g(x)\pi(x-1)}{\eta\mu(\pi x)}$$

$$f(x) = g(x) \frac{\pi(x-1)}{\eta\mu(\pi x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(x-1)}{\eta\mu(\pi x)} \quad \textbf{(2)}$$

Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(x-1)}{\eta\mu(\pi x)}$ θέτουμε $x-1 = u$. Οπότε $x = 1+u$ και $u \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(x-1)}{\eta\mu(\pi x)} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\pi u}{\eta\mu[\pi(1+u)]} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\pi u}{\eta\mu(\pi + \pi u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\pi u}{-\eta\mu(\pi u)} \\ &= - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu(\pi u)}{\pi u}} \\ &= - \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi u)}{\pi u}} \\ &= - \frac{1}{\lim_{(\pi u) \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi u)}{\pi u}} = - \frac{1}{1} = -1 \quad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

$$(2) \stackrel{(1), (3)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty.$$

16.

Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x)}{[f(x)]^2 + [g(x)]^2} = 0$.

Προτεινόμενη λύση

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

$$\begin{aligned} \text{Είναι } 0 < \frac{f(x) + g(x)}{[f(x)]^2 + [g(x)]^2} &= \frac{f(x)}{[f(x)]^2 + [g(x)]^2} + \frac{g(x)}{[f(x)]^2 + [g(x)]^2} < \\ &\frac{f(x)}{[f(x)]^2} + \frac{g(x)}{[g(x)]^2} = \\ &\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} \end{aligned}$$

Αποδείχθηκε ότι $0 < \frac{f(x) + g(x)}{[f(x)]^2 + [g(x)]^2} < \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$ κοντά στο x_0 .

Αλλά $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} \right] = 0 + 0 = 0$

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x)}{[f(x)]^2 + [g(x)]^2} = 0$.